数理解析研究所講究録
692巻 1989年 137-150



# 半線型楕円型作用素の変分固有値とその臨界値との関係について.

都立大・理　柴田徹太郎 ( Tetsutaro Shibata )

次の半線型固有値問題を考える:

$$(1)\quad \begin{cases} -\Delta u + f(x, u) = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ : 有界領域, $\partial\Omega$ : 滑らか, $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ : 滑らかで, $u$について odd, i.e. $f(x, -u) = -f(x, u)$ とする。

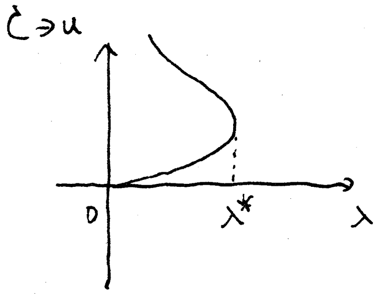
我々の目的は, (1)の Variational eigenvalue (変分固有値と呼ばれるものの定性的な性質を調べることである。 (1)の変分固有値を調べることの意義は, 次の2つの理由による:

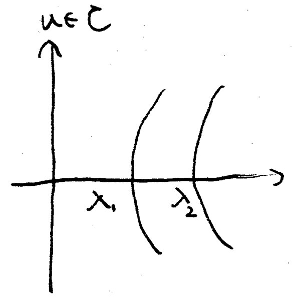
i) bifurcation 理論との関係

ii) 線型固有値問題の, mini-max 原理との関係

(ii)について．通常の分岐理論では，（方程式のtypeはいろいろであるが）

例
$$\begin{cases} \Delta u + \lambda e^u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$
の分岐図




$-\Delta u + u^3 = \lambda u$ in $\Omega$
$u = 0$ on $\partial\Omega$
の分岐図

のように，関数空間としては連続関数の空間を採用し，又，parameterとしては，$\lambda \in \mathbb{R}$を採用する。一方で，線型固有値問題は，$L^2$空間で考えるのが自然である。このことから，我々の仕事は，分岐理論で，$L^2$空間を関数空間にとり，parameterとして，$L^2$のnormをとることに対応している。

(iii)について．これは変分固有値の定義自身が，線型のmini-max原理の一般化になっていることから，線型の場合の固有値について成り立つ性質を，変分固有値も持つかどうかという興味である。

## 1° 定義と主定理

$u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$に対し，

- $\varphi(u) := \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 + \int dx \int_0^u f(x,s)\,ds$
- $\alpha > 0$ ( $L^2$- normalization parameter ) に対し
  $M_\alpha := \{ u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega) ;\ \int u^2 = \alpha^2 \}$
- $K \subset \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ ; compact, $0 \notin K$, symmetric w.r.to the origin ( $u \in K \Rightarrow -u \in K$ ) に対し、K の

genus を $\gamma(K)$ で表わす：

- $\gamma(K) := \inf\{ k \in \mathbb{N} ;\ {}^\exists \tau : K \longrightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ ; conti, odd $\}$

Remark. ここでいう genus とは、いくつかの公理をみたす，index と呼ばれるものの具体的な関数のひとつで，order, category of the set, なども採用してもよい。

- $K_n(\alpha) := \{ K \subset M_\alpha ;\ \gamma(K) = n \}$

上記の記号の下で，変分固有値を定義する．

定義　( $\lambda_n(\alpha), u_n(\alpha)$ ) $\in \mathbb{R} \times \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ が，(1) の変分固有値であるとは，これが (1) の解であり，さらに

- $2\varphi(u_n(\alpha)) = C_n(\alpha) := \inf_{K \in K_n(\alpha)} \sup_{u \in K} 2\varphi(u)$

- $\int u_n^2(\alpha) = \alpha^2$

をみたすときをいう。

このとき，$\lambda_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2}\left[ \int |\nabla u_n(\alpha)|^2 + \int f(x, u_n(\alpha)) u_n(\alpha) \right]$

で与えられる。

Remarks. (i) $f \equiv 0$, すなわち(1)が、線型固有値問題の場合，上の定義は通常の，mini－max 原理と一致し，

(2) $$\begin{cases} \lambda_n(\alpha) = \lambda_n & \text{for } {}^\forall\alpha > 0 \quad (\lambda_n : \text{第}n\text{固有値}) \\ C_n(\alpha) = \alpha^2 \lambda_n = \alpha^2 \lambda_n(\alpha) \end{cases}$$

となる。( R. Chiappinelli, Boll. Uni. Math. Ital (6) 4-B (1985) 867－882 )

本質的には、

$$\alpha^2 \lambda_n = \inf_{V \in V_n(\alpha)} \sup_{V \ni u} 2\varphi(u)$$

ここで，$V_n(\alpha) = \{ M_\alpha \cap X_n ; X_n \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega)$, $n$次元部分空間$\}$

と，$\gamma(M_\alpha \cap X_n) = n$ ( Borsuk－Ulam の定理 ) を使う。

(ii) $\lambda_n(\alpha)$ は，$\alpha$ に対して一意的に定まるか，あるいは、$\alpha$について連続かどうかは $f$の性質に依存する。

ここでの我々の目的は，( 2 ) の関係を ( 1 ) の場合に一般化することにより，上の Remark (ii) で述べたような，$\alpha > 0$ に対する $\lambda_n(\alpha)$ の性質を調べることで

ある。以下，$N=1$ を仮定する。

定理. (3) $$dC_n(\alpha)/d\alpha = 2\alpha\lambda_n(\alpha)$$

が，次の場合に成り立つ。

(a) $f(x,u)=f(u)$ (autonomous)，さらに $f(u)/u \uparrow \infty$ as $u \uparrow \infty$.

この場合は，$\forall \alpha>0$ に対し，$\lambda_n(\alpha)$ は一意的に定まる。

(b) $f$ が autonomous とは限らない場合は次を仮定する：

- $f$ は $x$，$u$ について解析的.
- $f(x,u)$ が $u>0$ について単調増加で，$\exists a, b, k \geq 0$ が存在して，
$$|f(x,u)| \leq a|u|^k + b$$
をみたす。
- $f(x,u)>0$ if $u>0$

このとき，a.e. $\alpha>0$ に対し，(3) をみたす ($\lambda_n(\alpha)$, $u_n(\alpha)$) が存在する。

Remarks. (i) (a) の場合，$\lambda_n(\alpha)$ は $\alpha$ について連続であるが，(b) の場合は open problem である。さらに，$\lambda_n(\alpha)$ の一意性も未解決である。

(ii) (3) では，$C_n(\alpha)$ をいきなり $\alpha$ で微分しているが，

実は，$C_n(\alpha)$ が $\alpha$ の連続関数であることも自明ではない。

(iii) 過去の結果について．

この方面の仕事は少なく，先の Remark で与えた，R. Chiappinelli の仕事が最も新しい仕事である．そこで，彼は，$|f(x,u)| \leq a|u| + b$ $(\exists a, b \geq 0)$ の条件の下で，$\lambda_n$ を，$-\Delta u = \lambda u$ in $\Omega$，$u|_{\partial\Omega} = 0$ の第 n 固有値としたとき，$\forall \alpha > 0$ に対して，

$$|\lambda_n(\alpha) - \lambda_n| \leq 3a + 5b|\Omega|^{\frac{1}{2}}\dot{\alpha}^{-1}$$

( $|\Omega|$：$\Omega$ の体積 )

を示した。これは，

$$\alpha^2\lambda_n = \inf_{K \in K_n(\alpha)} \sup_{u \in K} \int |\nabla u|^2$$

であることを利用して，$|\alpha^2\lambda_n - C_n(\alpha)|$，$|C_n(\alpha) - \alpha^2\lambda_n(\alpha)|$ を評価することにより得られた。

## 2° 基本的な補題

この節では，定理の (b) にあたる部分の証明に用いる補題を示すことにする。

<u>補題 1°</u>　定理の仮定の下で，$\forall \alpha > 0$ に対して，(1) の変分固有値が存在する。

Remark: 存在に関しては，次元が一般でも，$f$ の増大度に条件をつければ示すことができる。

証明の方針　次の手順で示せばよい。

(i) $M_\alpha \underset{\text{diffeo}}{\sim} S := \{ u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega) ; \int |\nabla u|^2 = 1 \}$

$u \longmapsto \dfrac{u}{\|\nabla u\|} \in S$

(ii) $\varphi$ は $M_\alpha$ 上，下に有界

(iii) $\varphi$ は $M_\alpha$ 上，Palais-Smale 条件をみたす：$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M_\alpha$；$\{\varphi(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$：有界，$\varphi'_\alpha(u_n) := \varphi'(u_n) - (\varphi'(u_n)u_n)u_n/\alpha^2 \longrightarrow 0$ in $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega)'$ が収束列を含む。これは Sobolev の埋蔵定理により示せる。

これらの条件は，容易に証明でき，(i)〜(iii) の条件が成り立てば，Rabinowitz の定理（Variational methods for nonlinear eigenvalue problems, in Eigenvalues of Nonlin. Problems, CIME Cremense, Roma 1974 pp 141−195）により，$C_n(\alpha)$ が critical value であることが示される。

q. e. d.

補題2　$C_n(\alpha)$ は，$\alpha$ の連続関数である。

証明の方針　$C_n(\alpha)/\alpha^2$ の連続性を示す。

$$C_n(\alpha)/\alpha^2 = \inf_{K\in K_n(1)} \sup_{u\in K} \left\{ \int |\nabla u|^2 + 2\int dx \int_0^u f(x,\alpha s)/\alpha \, ds \right\}$$

であることに注意する。

直接示すのは難しいので背理法で示す。

$^\exists \alpha_0 > 0$, $^\exists \delta > 0$, $\alpha_k \to \alpha_0$ as $k \to \infty$ s.t.

$$|C_n(\alpha_k)/\alpha_k^2 - C_n(\alpha_0)/\alpha_0^2| > \delta$$

と仮定して，部分列をとると，

(i) $C_n(\alpha_k)/\alpha_k^2 > C_n(\alpha_0)/\alpha_0^2$

(ii) $C_n(\alpha_k)/\alpha_k^2 < C_n(\alpha_0)/\alpha_0^2$

となる無限部分列が少なくとも一方は存在する。簡単のため，(i)の場合のみを示そう。

$$0 < C_n(\alpha_k)/\alpha_k^2 - C_n(\alpha_0)/\alpha_0^2 = \inf_{K_n(1)} \sup_K \{\int |\nabla u|^2 + 2\int dx \int_0^u f(x, \alpha_k s)/\alpha_k \, ds\} - \inf_{K_n(1)} \sup_K \{\int |\nabla u|^2 + 2\int dx \int_0^u f(x, \alpha_0 s)/\alpha_0 \, ds\} \quad (*)$$

$\varepsilon > 0$：十分小をとり，$K_\varepsilon \in K_n(1)$ を，

$$C_n(\alpha_0)/\alpha_0^2 < \sup_{K_\varepsilon} \{ \cdots\cdots \} < C_n(\alpha_0)/\alpha_0^2 + \varepsilon$$

ととる。このとき，簡単な計算により，

$$(*) \leqq \inf_{K_n(1)} \sup_K \{\int |\nabla u|^2 + 2\int dx \int_0^u f(x, \alpha_k s)/\alpha_k \, ds\}$$

$$- \sup_{K_\varepsilon} \{\int |\nabla u|^2 + 2\int dx \int_0^u f(x, \alpha_0 s)/\alpha_0 \, ds\} + \varepsilon$$

$$\leq \sup_{K_\varepsilon} \{\int |\nabla u|^2 + 2\int dx \int_0^u f(x, \alpha_k s)/\alpha_k \, ds\} - \sup_{K_\varepsilon} \{\int |\nabla u|^2 + 2\int dx \int_0^u f(x, \alpha_0 s)/\alpha_0 \, ds\} + \varepsilon$$

$$\leqq \sup_{K_\varepsilon} \left| 2\int dx \int_0^u (f(x, \alpha_k s)/\alpha_k - f(x, \alpha_0 s)/\alpha_0)\, ds \right| + \varepsilon$$

ここで，$k \to \infty$ とすれば矛盾となる。　q.e.d.

Remark: $f(x,u)$ が $(u>0)$ で単調増加関数であれば，$c_n(\alpha)$ は単調増加関数となる。実際 $\alpha>\alpha_0$ とすれば，$u=\alpha v$，$v\in M_1$ として，

$$
\begin{aligned}
2\varphi(u) &= \alpha^2\int|\nabla v|^2+2\int dx\int_0^{\alpha v}f(x,s)\,ds \\
&= \alpha^2\int|\nabla v|^2+2\int dx\int_0^{\alpha_0 v}\frac{\alpha}{\alpha_0}f\left(x,\frac{\alpha}{\alpha_0}t\right)dt \\
&\geqq (\alpha/\alpha_0)^2\cdot\alpha_0^2\int|\nabla v|^2+2\int dx\int_0^{\alpha_0 v}\frac{\alpha}{\alpha_0}f(x,t)\,dt \\
&\geqq 2\varphi(\alpha_0 v)
\end{aligned}
$$

この結果を合わせて，

補題3° $dc_n(\alpha)/d\alpha$ は a.e. $\alpha>0$ について，存在する。

次に，定理の(b)を示すときに必要な次の命題を用意する：

命題4° $\alpha_k\to\alpha$ as $k\to\infty$ とせよ。このとき，（部分列をとることにより）

$$\lambda_n(\alpha_k)\longrightarrow\lambda_n(\alpha),\quad u_n(\alpha_k)\longrightarrow u_n(\alpha_0).$$

となる列が存在する。

証明の方針 (i) $\alpha>0$ をひとつ固定したとき，$\alpha_k\to\alpha$ の条件下で，$|\lambda_n(\alpha_k)|\leqq{}^\exists M<\infty$ を示す。実際，${}^\exists c_0>0$ s.t. $|\lambda_n(\alpha)|\leqq c_0\, c_n(\alpha)$ が簡単に示せるので，補題2°により o.k. となる。

(ii) 必要ならば部分列を取り直して $\lambda_n(\alpha_k)\longrightarrow{}^\exists\lambda$ と

する。このとき，$v_n(\alpha_k) = \alpha u_n(\alpha_k)/\alpha_k \in M_\alpha$ とおくと，$(v_n(\alpha_k))_{k \in N}$ は P−S 条件をみたすことがわかる。よって，$\overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega)$ で $v_n(\alpha_k)$ の収束する部分列をとり出すことができる；$v_n(\alpha_k) \longrightarrow v \in M_\alpha$ as $k \to \infty$.

このとき，$(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega)$ は，(1)の解である。ここで補題2°により，$C_n(\alpha)$ の連続性を用いれば，結局，$C_n(\alpha) = 2\Phi(v)$ が示される。これは，$(\lambda, v)$ が変分固有値と，その対応する解であることを示している。

q. e. d.

## 3° 定理の証明

1° <u>(a)の証明</u>　(a)の部分は，H. Berestycki，J. Funct. Anal. 40 (1981)，H. P. Heinz，J. Diff. eq. 62 (1986) の理論を組み合わせる。これにより，(1)のすべての解は，変分固有値と，その対応する固有関数であることがわかる：

(i) $(\lambda, u)$ を(1)の解とする。$u$ の内部の零点の数を $(k-1)$ 個とすると

$$\lambda_{k-1}[f'(u)] < \lambda < \lambda_k[f'(u)]$$

が成り立つ。これにより，(1)の解 $(\lambda, u)$ のまわりで

陰関数定理を用いることができる。これを示すには，$f(u)/u$ の単調性と，(1)の方程式を微分したものを考えればよい。ここで，$f(x,u)=f(u)$ の仮定がきいてくる。

(ii) 比較定理　$(\lambda,u)$，$(\mu,v)$ が (1)の解とする。このとき　$\lambda<\mu \iff |u|<|v|$. if $u$ と $v$ の零点の個数が一致．　これを示すには，まず，$u$ と $v$ の零点の位置がすべて一致することを用いて，$B:=u'v-uv'$ とおき，$t_0$，$t_1$ を $u$ の零点とすると，

$$B(t_1)-B(t_0)=0=(\mu-\lambda)\int_{t_0}^{t_1}uv\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\Big(f(t,u(t))/u(t)-f(t,v(t))/v(t)\Big)u(t)v(t)\,dt$$

と $f$ に対する仮定より主張を得る。

(iii) すべての解が変分固有値と，対応する変分固有関数であることをいうためには，$^\forall\alpha>0$ に対して，$(n-1)$ 個の内点の零点をもつ変分解が存在することを示せばよい。これは Heintz による。

(iv) (i)により，$\lambda\longmapsto u_\lambda$ は何回でも微分可能で，

$$dC_n(\alpha(\lambda))/d\lambda=dC_n(\alpha(\lambda))/d\alpha\cdot d\alpha/d\lambda$$

一方，$\alpha(\lambda)$ に対応する $u_n(\alpha(\lambda))$ を $u_\lambda$ と書くと，

$$C_n(\alpha(\lambda))=\int|\nabla u_\lambda|^2+2\int dx\int_0^{u_\lambda}f(s)\,ds.$$

従って，

$$dC_n(\alpha(\lambda))/d\lambda = \int(-\Delta u_\lambda' \cdot u_\lambda - \Delta u_\lambda \cdot u_\lambda')$$
$$+ 2\int f(u_\lambda)\, u_\lambda'\, dx \qquad ※$$

ここで $\quad -\Delta u_\lambda + f(u_\lambda) = \lambda u_\lambda \quad \cdots\cdots(☆)$

両辺をλで微分して，

$$-\Delta u_\lambda' + f'(u_\lambda)\, u_\lambda' = u_\lambda + \lambda u_\lambda$$

従って，

$$※ = \int(u_\lambda + \lambda u_\lambda' - f(u_\lambda)u_\lambda')\, u_\lambda + \int(\lambda u_\lambda - f(u_\lambda))u_\lambda'$$
$$+ 2\int f(u_\lambda)\, u_\lambda'\, dx$$
$$= \alpha^2(\lambda) + 2\lambda\int u_\lambda u_\lambda' + \int f(u_\lambda)u_\lambda' dx - \int f'(u_\lambda)u_\lambda u_\lambda'$$

ここで (☆)の両辺に $u_\lambda'$ を掛けて積分すれば，

$$\int -\Delta u_\lambda u_\lambda' + \int f(u_\lambda)\, u_\lambda' = \lambda\int u_\lambda u_\lambda'$$
$$\int u_\lambda(-\Delta u_\lambda') + \int f(u_\lambda)\, u_\lambda' = \lambda\int u_\lambda u_\lambda'$$
$$\int u_\lambda(u_\lambda + \lambda u_\lambda' - f(u_\lambda)u_\lambda') + \int f(u_\lambda)\, u_\lambda' = \lambda\int u_\lambda u_\lambda'$$

従って，

$$\alpha^2(\lambda) - \int f(u_\lambda)\, u_\lambda' u_\lambda + \int f(u_\lambda)\, u_\lambda' = 0$$

一方， $\qquad \alpha^2(\lambda) = \int u_\lambda^2$

従って， $\qquad 2\alpha(\lambda)\dfrac{d\alpha}{d\lambda} = 2\int u_\lambda u_\lambda'$

(iii)より $d\alpha/d\lambda \neq 0$ 従って，

$$dC_n(\alpha(\lambda))/d\alpha = 2\alpha(\lambda)\lambda \qquad \text{q.e.d.}$$

2° (β)の証明 $\quad \alpha > 0$ : fix. この$\alpha$において，

$C_n(\alpha)$は微分可能とする。

命題4°により，$(\lambda_n(\alpha_k), u_n(\alpha_k)) \longrightarrow (\lambda_n(\alpha), u_n(\alpha))$

$\alpha_k \to \alpha$ as $k \to \infty$，$\alpha_k \neq \alpha$ となる列を選び，$(\lambda_n(\alpha)$，

$u_n(\alpha))$ において展開することを考える。

(i) $(\lambda_n(\alpha), u_n(\alpha))$ で線型化作用素が退化していない場合は(a)と同様にして，

$$d\,C_n(\alpha(\lambda))/d\alpha \cdot d\alpha(\lambda)/d\lambda = 2\alpha(\lambda)\lambda \frac{d\alpha(\lambda)}{d\lambda}$$

となる。ここで，$d\alpha(\lambda_0)/d\lambda_0 = 0$ の場合は，両辺をさらに微分することにより，初めて $d^k\alpha(\lambda_0)/d\lambda_0^k \neq 0$ になるまで微分すればよい。このような $k$ は，仮定と $\alpha_k \neq \alpha$ ととっていることにより存在する。

(ii) $(\lambda_n(\alpha), u_n(\alpha))$ で線型化作用素が退化している場合は，Rabinowitz の「bifurcation from simple eigenvalue」により，$|s| \ll 1$ を parameter として，

$\lambda = \lambda(s) = \lambda_n(\alpha_k)$，$\lambda_0 = \lambda_n(\alpha)$，$u_0 = u_n(\alpha)$．

$u = u(s) = u_n(\alpha_k) = u_0 + s\phi + s^2 z_1 + \cdots$

ここで $\phi$ は，$\int \phi^2 = 1$ をみたす，

$$\begin{cases} -\Delta\phi + f(u_0)\phi = \lambda_0\phi & \text{in } \Omega \\ \phi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の解。このときも，(i)と同様にして，計算することにより，$d\,C_n(\alpha(s))/d\alpha \cdot \dfrac{d\alpha}{ds} = 2\alpha\,\lambda(s)\dfrac{d\alpha}{ds}$

を得る。

同様に，$d^k\alpha/ds^k \neq 0$ となる $k$ をもとめればよい。

q.e.d.